Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Résumé

Fonction logarithme népérien

Plan de chapitre 5 : Fonction logarithme népérien

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

CENTRE EL MOUMEN | **Résumé de cour** | **Logarithme népérien** | **2 BAC BIOF** | **Prof : EL MOUMEN**

Définition du fonction logarithme népérien

- La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par ln
- La fonction ln est définit et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $ln(1) = 0$
- Pour tout x de $]0,+\infty[$: $ln'(x) = \frac{1}{x}$
- On a ; $\mathrm{Ln}(e) = 1$ avec le nombre e est un nombre irrationnel ; $e \cong 2,7$

Propriétés algébrique le la fonction ln

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r\,ln(x)$; $r \in \mathbb{Q}$

Equations et inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\mathrm{Ln}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\mathrm{Ln}(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$

Prof : El Moumen

Limites de la fonction ln

- FI: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r \ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple de méthode de changement de variable pour calcul des limites

Calculons la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

On pose $t = \sqrt{x}$ donc $t^2 = x$

et on a $x \to +\infty$ donc $t \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{2\ln(t)}{t}$$

$$= 2 \times 0 = 0 \quad \left(\text{car } \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0\right)$$

Etude de La fonction logarithme népérien

1) Domaine de définition est $D_{ln} =]0,+\infty[$

2) Le sens des variations de la fonction ln

On a pour tout x de $]0,+\infty[$: $ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

3) Le signe de la fonction ln sur $]0,+\infty[$

- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$

On a ln est str croissante sur $[1,+\infty[$ donc

$x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$

$\Leftrightarrow ln(x) \geq 0$

- Sur l'intervalle $]0,1]$

On a ln est str croissante sur $]0,1]$ donc

$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(1)$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 0$

Conclusion : (le tableau de signe de ln)

x	0		1		$+\infty$
ln(x)	||	$-$	0	$+$	

- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4) Equation de la tangente de (Cf) en 1

(T): $y = ln'(1)(x-1) + ln(1)$

(T): $y = x - 1$

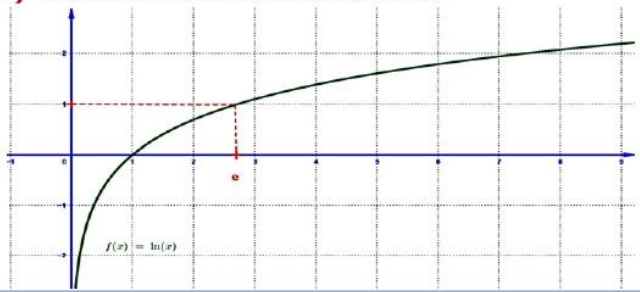
5) Les branches infinies de la courbe (Cf)

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est un asymptote verticale à (Cf)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (Ox) au voisinage de $+\infty$

6) La courbe de la fonction ln



Dérivée de la fonction ln(U) avec $U \neq 0$

Si U est dérivable sur I alors ln(U) est dérivable sur I et on a ; $\ln'(|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Primitives

- Les primitives de la fonction $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$ sur I sont les fonctions :
  $x \to \ln(|U(x)|) + c$; $c \in IR$
- Les primitives de la fonction $x \to x^r$ sur IR sont les fonctions $x \to \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
  $avec$; $c \in IR$ avec $r \in \mathbb{Q}/-1$
- Les primitives de la fonction $x \to U'(x) \times U(x)^r$ sur I sont les fonctions :
  $x \to \frac{U^{r+1}}{r+1} + c$; $c \in IR$