CENTRE EL MOUMEN

Niveau : 3éme Année Collège

Résumé
Systèmes

Plan de chapitre 13 : Systèmes

- Cours détaillé
- **Résumé de cours**
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

3ème AC

Prof El Moumen

المومن جا عندك

حتى الدار

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Abdelwahed El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen https://www.elmoumen.academy

Définition 1

Un système de deux équations à deux inconnues du premier degré est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

où a, b, c, d, e et f sont des nombres réels donnés.

- x et y sont les inconnues.
- Un couple $(x; y)$ vérifiant les deux équations en même temps, est une solution du système.

Définition 2

Résoudre un système, c'est trouver tous les couple $(x; y)$ qui vérifient à la fois les deux équations.

Exemple

Le couple $(5; 9)$ est une solution du système : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$

Car : $\begin{cases} 2 \times 5 - 9 = 10 - 9 = 1 \\ -4 \times 5 + 3 \times 9 = -20 + 27 = 7 \end{cases}$

II. Résolution algébrique d'un système

1. Méthode de substitution

Règle

Dans cette méthode, on écrit, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre, et on remplace l'expression obtenue dans l'autre équation. On obtient une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre, par substitution, le système suivant:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 & ① \\ x + 5y = -3 & ② \end{cases}$$

Dans l'équation ② on écrit x en fonction de y.
C'est à dire : $\boxed{x = -3 - 5y}$ ③
On substitue x dans l'équation ①, on obtient:

$$2(-3 - 5y) - 3y = 7$$
$$-6x - 10y - 3y = 7 \quad -6 - 13y = 7$$
$$-13y = 7 + 6$$
$$-13y = 13$$
$$y = \frac{13}{-13}$$
$$\boxed{y = -1}$$

On remplace y par sa valeur -1 dans l'équation ③. On obtient :

$$x = -3 - 5 \times (-1)$$
$$x = -3 + 5$$
$$\boxed{x = 2}$$

Donc la solution du système est le couple $(2; -1)$

2. Méthode de combinaison linéaire

Règle

Dans cette méthode, on ajoute, membre à membre, les deux équations après les avoir multipliées par des coefficients convenablement choisis pour éliminer une des deux inconnues.

Exemple

Résoudre, par combinaison linéaire, le système:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 32 & ① \\ 7x - 6y = 58 & ② \end{cases}$$

On multiplie les deux membres de l'équation ① par -3 et les deux membres de l'équation ② par 2. On obtient :

$$\begin{cases} -9x + 12y = -96 & ③ \\ 14x - 12y = 116 & ④ \end{cases}$$

On additionne les deux équations ③ et ④ membres à membre pour éliminer y. On aura:

$$-9x + 12y + 14x - 12y = -96 + 116$$
$$5x = 20$$
$$x = \frac{20}{5}$$
$$\boxed{x = 4}$$

On multiplie les deux membres de l'équation ① par 7 et les deux membres de l'équation ② par -3. On obtient :

$$\begin{cases} 21x - 28y = 224 & ⑤ \\ -21x + 18y = -174 & ⑥ \end{cases}$$

On additionne les deux équations ⑤ et ⑥ membres à membre pour éliminer x. On aura:

$$21x - 28y - 21x + 18y = 224 - 174$$
$$-10y = 50$$
$$y = \frac{50}{-10}$$
$$\boxed{y = -5}$$

Donc la solution du système est le couple $(4; -5)$

III. Résolution graphique d'un système

Principe

On associe aux deux équations du système deux équations de deux droites. Le problème revient alors à chercher, s'il existe, le point d'intersection des deux droites. Les coordonnées de ce point constituent alors la solution du système.

Exemple 1

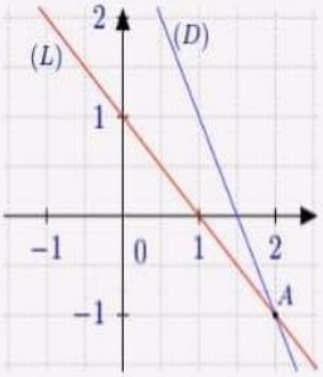
Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

On considère les droites :

$$\begin{cases} (D): \quad y=-2x+3 \\ (L): \quad y=-x+1 \end{cases}$$

Les droites (D) et (L) n'ont pas le même coefficient directeur.
Donc (D) et (L) sont deux droites sécantes.
Soit A le point d'intersection de (D) et (L).



Le point A de coordonnées $(2;-1)$ est le point d'intersection des droites (D) et (L), **donc le couple $(2;-1)$ est la solution du système.**

Exemple 2

Résoudre graphiquement le système :

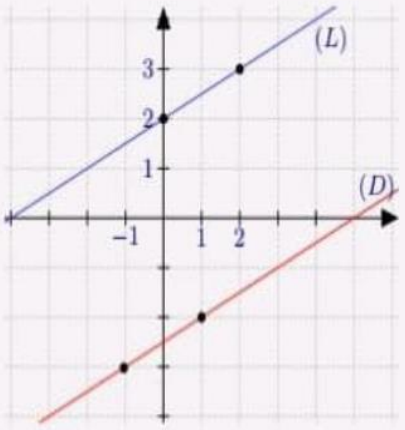
$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -2x+4y=8 \end{cases}$$

On considère les droites :

$$\begin{cases} (D): \quad y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \\ (L): \quad y=\dfrac{1}{2}x+2 \end{cases}$$

Les droites (D) et (L) ont le même coefficient directeur.

Donc (D) et (L) sont strictement parallèles.



Donc le système n'a pas de solutions.

Exemple 3

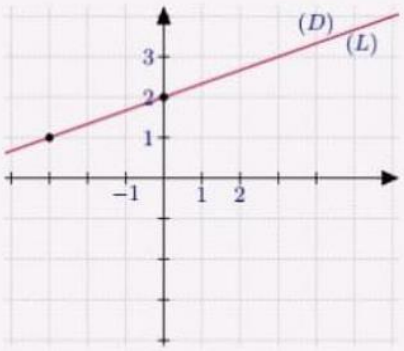
Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x - 3y = -6 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

On considère les droites :

$$\begin{cases} (D): \quad y = \frac{1}{3}x + 2 \\ (L): \quad y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

Les droites (D) et (L) ont le même coefficient directeur et la même équation.
Donc (D) et (L) sont confondues.



Donc tous les couples de la forme $\left(x; \frac{1}{3}x + 2\right)$ sont solutions du système où x un nombre réel quelconque.

IV. Résolution de problèmes

Exemple

Yassine dispose de 13 billets de 20 dirhams et de 50 dirhams.
Si la valeur de tous les billets est de 500 dirhams, quel est alors le nombre de billets de chaque espèce?

Réponse :

1 **Choix des inconnues :**

Soit x le nombre de billets de 20 DH.

Soit y le nombre de billets de 50 DH.

2 **Mise en système :**

Yassine dispose de 13 billets.

Donc $x + y = 13$

La valeur des billets est de 500 DH.

Donc $20x + 50y = 500$ Donc le système est :

$$\begin{cases} x + y = 13 & ① \\ 20x + 50y = 500 & ② \end{cases}$$

3 D'après ① on a : $y = 13 - x$ ③

En remplace y dans ②, on obtient :

$$\begin{aligned} 20x + 50(13 - x) &= 500 \\ 20x + 650 - 50x &= 500 \\ 20x - 50x &= 500 - 650 \\ -30x &= -150 \\ x &= \frac{-150}{-30} \\ \boxed{x = 5} & \end{aligned}$$

En remplace x par 5 dans l'équation ③

$$y = 13 - x = 13 - 5 = \boxed{8}$$

4 **Retour au problème et vérification:**

$$\begin{cases} 5 + 8 = 13 \\ 20 \times 5 + 50 \times 8 = 100 + 400 = 500 \end{cases}$$

Donc il y a 5 billets de 20 DH et 8 billets de 50 DH.