Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Série 2

CALCULE D’INTEGRALE

Plan de chapitre 10 : CALCULE D’INTEGRALE

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d’exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

Exercice 01

Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

1) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$
4) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Prof : El Moumen

Exercice 02

1) Vérifier que : $\int_1^2 \ln(x) dx \geq 0$
2) a) Vérifier que $\forall t \in [1, +\infty[; \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}$
   b) En déduire que $\forall x \in [1, +\infty[; 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$
3) a) Montrer que: $(\forall t \in \mathbb{R}^+), 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$
   b) En déduire que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+), x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$
   c) Déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 ln(1+x)\, dx$

Exercice 03

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+ln\, x}{x^2}$; (C_h) la courbe de f dans un repère orthonormé (unité1 cm)

Soient $n \in IN^*$; on désigne par I_n l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) la droite (Ox) et les droites ; $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$

1) Montrer que la fonction $F : x \to \frac{-2-lnx}{x}$ et une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$
2) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty\right] : f(x) \geq 0$
2) Calculer I_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 04

Calculer les intégrales:

$$A = \int_0^1 \frac{x^3+x+4}{x+1} dx \quad ; B = \int_2^3 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$$

Exercice 05

Soit f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) ln\, x$$

Et (C_f) sont graphe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 1 cm et Soit la fonction h définit sur $[1; e]$ par :

$h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x$ et (C_h) son graphe dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Montrer que : $\forall x \in [1 ; e] ; f(x) - h(x) \leq 0$
2) Par une intégration par parties montrer que

$$\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right) ln\, x\, dx = \frac{2e^3 - 18e^2 - 17}{18}$$

3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Exercice 06

Soit $(U_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite tel que : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

1) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$
2) Déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\geq1}$

Exercice 07

Soit $(I_n)_{\mathbb{N}^*}$ une suite tel que $I_n = \int_1^e (lnx)^n\, dx$

1) Calculer I_1
2) Montrer que $(I_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante
3) Par une intégration par parties montrer

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : I_n = e - n\, I_{n-1}$$

Prof : El Moumen