Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Résumé

Equations différentielles

Plan de chapitre 9 : Equations différentielles

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

Equations différentielles de premier ordre : $y' = ay + b$

1) L'équation (E) ; $y' = ay + b$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire d'ordre1 ; ou y est la fonction inconnue et y' sa fonction dérivée

2) On appelle solution de l'équation (E) , toute fonction f qui vérifie $f'(x) = af(x) + b$

Résolution de l'équation : (E) ; $y' = ay + b$

1) Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax}$ ou k est une constante réelle

2) Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ou k est une constante

3) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
Il existe une solution unique y de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$

Exemple

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivantes : (E_1); $y' + 2y = 3$

$$y' + 2y = 3 \Leftrightarrow y' = -2y + 3$$

La solution générale de l'équation (E_1); sont les fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = ke^{-2x} + \frac{3}{2}$ ou k est une constante

Prof : El Moumen

2) Déterminer la solution f de (E_1) qui vérifie $f(1) = 2$

$$f(1) = 5 \Leftrightarrow ke^{-2} + \frac{3}{2} = 5$$

$$\Leftrightarrow ke^{-2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow k = \frac{7e^2}{2}$$

Donc ; $f(x) = \frac{7}{2}e^2\, e^{-2x} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}e^{-2x+2} + \frac{3}{2}$

Equations différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

1) L'équation (E): $y'' + ay' + by = 0$ tel que a et b deux constantes réelles est appelée équation différentielle linéaire du second ordre ou y est la fonction inconnue et y' sa dérivée première et y'' sa dérivée d'ordre 2

2) L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à l'équation (E): $y'' + ay' + by = 0$

Résolution de : (E) ; $y'' + ay' + by = 0$

Soit Δ le discriminant de L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, associée à (E): $y'' + ay' + by = 0$

- **Cas 01 ; $\Delta > 0$**

  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions réelles r_1 et r_2
  Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad ; \quad \alpha; \beta \in \mathbb{R}$$

- **Cas 02 ; $\Delta = 0$**

  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet une solution réelle unique r_0
  Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0 x} \quad ; \quad \alpha; \beta \in \mathbb{R}$$

- **Cas 03 ; $\Delta < 0$**

  L'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = p + iq$ et $z_2 = \overline{z_1}$

Prof : El Moumen

Donc les solutions de l'équation (E) ; sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{p x} \quad ou \quad \alpha; \beta \in \mathbb{R}$$