Niveau : Deuxième Bac
sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Résumé

Calcul de probabilités

Plan de chapitre 12 : Calcul de probabilités

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

A) Dénombrement.

1) Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de n éléments distincts $E = \{x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n\}$

Le nombre d'éléments n est appelé le cardinal de E , noté $\mathrm{Card}(E)$

2) Principe fondamentale de dénombrement

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent k choix,

Si le premier choix se fait de n_1 façons différentes

Le deuxième choix se fait de n_2 façons différentes, ...,

....

Le $k^{\text{ième}}$ choix se fait de n_k façons différentes,

Alors le nombre de résultats possibles est donné par le produit :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

3) Arrangements.

a) Arrangements sans répétition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- ✓ Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi par n est noté A_n^p, et on a : $(1 \le p \le n)$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

Remarques : On pose par convention $0! = 1$.

- ✓ Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que : $p \le n$,

On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$; $A_n^n = n!$; $A_n^1 = n$.

Cas particulier : Permutations.

Soit n un entier naturel non nul.

- ✓ Tout arrangement sans répétition de n éléments est appelé permutation n éléments.
- ✓ Le nombre permutations de n éléments est noté n!, se lit factorielle n, et on a : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

b) Arrangements avec répétition.

- ✓ Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi par n est noté n^p

4) Combinaisons.

Soit n un entier naturel, et soit E un ensemble de cardinal n

- ✓ Le nombre de combinaison de p éléments de E pris parmi n éléments est noté C_n^p, et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Remarques : $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ et $C_n^P = C_n^{n-P}$

5) Type de tirage et importance d'ordre .

Type de tirage	Nombre de tirages possibles	Importance de l'ordre
Avec remise	n^p	Important
Sans remise	A_n^p	Important
Simultané	C_n^p	*Sans importance*

Nombre de possibilité d'arranger p éléments (Coefficient d'ordre)

Si on a p_1 éléments de type A et p_2 éléments de type B et p_3 éléments de type C tel que $p_1 + p_2 + p_3 = p$

Alors le nombre de possibilité d'arranger les p éléments est :

$$\frac{p!}{p_1! \times p_2! \times p_3!}$$

B) Probabilité d'un évènement.

1) Propriétés : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, on a :

- ➢ $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- ➢ Pour tout événement A de Ω, on a : $0 \le P(A) \le 1$.
- ➢ Pour tout événement A de Ω, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- ➢ Si A et B deux événements de Ω, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ➢ Si A et B deux événements incompatibles de Ω ; $(A \cap B = \emptyset)$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) Hypothèse d'équiprobabilité.

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, la probabilité de l'événement A de Ω est : $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

3) Probabilité conditionnelle.

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire tes que : $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant que de l'événement A est réalisé est noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ défini par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarques : On a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$
Donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$
Cette relation est appelée loi des probabilités totales.

4) Indépendance de deux événements.

Soient A et B deux événements associés à une même expérience

- On dit que les événements A et B sont indépendants si
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$
- Les événements A et B sont indépendants si et seulement $P_A(B) = P(B)$; avec $P(A) \neq 0$

5) Epreuves répétées.

Soit A un événement associé à une expérience de probabilité p.
On répète l'expérience n fois dans les mêmes conditions
Alors la probabilité de réaliser exactement k fois l'événement A est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

C) Variable aléatoire-Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

1) Définitions :

- ✓ Toute fonction définie sur l'univers Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire, notée X ou Y ou Z....
- ✓ Les valeurs prises par la variable aléatoire X notées $\Omega(X)$.
- ✓ Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω associé à une expérience aléatoire telle que : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X,
C'est calculer la probabilité de chacun des événements $\{X = x_i\}$ où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- ✓ On résume la loi de probabilité de X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

2) Espérance mathématique-Variance et écart-type.

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω associé

- ✓ L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$
- ✓ La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $V(X)$ définie par : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$

- ✓ L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

3) Loi binomiale.

Soit une expérience aléatoire formée d'une répétition n fois de manière indépendante d'une même épreuve à deux issues sont :
A succès de probabilité p, et $\overline{A}$ échec de probabilité $q = 1 - p$
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le succès se réalise au cours de cette expérience.

- ✓ On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $X \to B(n; p)$.
- ✓ La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété.

Soit X une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

- ✓ Les valeurs prise par la variable aléatoire X sont : $\{0, 1, 2, \dots, n\}$
- ✓ $(\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- ✓ L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = np$.
- ✓ La variance de la variable aléatoire X est :
$$V(X) = npq = np(1-p) = E(X).(1-p)$$
- ✓ L'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$