Niveau : Deuxième Bac sciences PC /SVT /STE

CENTRE EL MOUMEN

Série 1

Equations différentielles

Plan de chapitre 9 : Equations différentielles

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

Exercice 01

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1) ; y'' - 3y' + 2y = 0$$

b) Déterminer la fonction f solution de (E_3) qui vérifie

$$f(0) = 3 \quad et \quad f'(0) = 8$$

2)a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_2) ; y'' - 6y' + 9y = 0$$

b) Déterminer la fonction f solution de (E_2) qui vérifie

$$f(0) = -1 \quad et \quad f'(0) = 5$$

3)a) Résoudre dans IR l'équation différentielle

$$(E_3) ; y'' - 2y' + 5y = 0$$

b) Déterminer la fonction f solution de (E_2) qui vérifie

$$f(0) = 5 \quad et \quad f'(0) = 9$$

Solution

1) L'équation caractéristique associée à (E_1) est $r^2 - 3r + 2 = 0$

On a $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$

Donc l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, admet deux solutions réelles sont $r_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1$ et $r_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$

Et par suite les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{2x} \ . ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$$

b) On a $f(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{2x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

Déterminons α *et* β tels que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 8$

On a ; $f'(x) = \alpha e^{x} + 2\beta e^{2x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

Prof : El Moumen

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \beta = 5 \quad ; (L_2 - L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

D'où $f(x) = -2e^{x} + 5e^{2x}$

2) L'équation caractéristique associée à (E_2) est $r^2 - 6r + 9 = 0$

On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$

Donc l'équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$, admet une solution réel unique $r_0 = \frac{6}{2\times 1} = 3$

Et par suite les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$$

b) On a $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

Déterminons α *et* β tels que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 5$

On a ; $f'(x) = \alpha e^{3x} + 3(\alpha x + \beta)e^{3x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + 3\beta = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha - 3 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

D'où $f(x) = (8x - 1)e^{3x}$

3) L'équation caractéristique associée à (E_3) est $r^2 - 2r + 5 = 0$

On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$

Donc l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 3 = 0$, admet deux solutions complexes sont $z_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2\times 1} = 1 + 2i$ et $z_2 = \overline{z_1}$

Donc les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = (\alpha cos(2x) + \beta sin(2x))e^{1\times x}$ *ou* $\alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

b) On a $f(x) = (\alpha\, cos(2x) + \beta sin(2x))e^{x} \ ; \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

Déterminons α *et* β tels que $f(0) = 5$ et $f'(0) = 9$

$$f' = \left(-2\alpha sin(2x) + 2\beta cos(2x)\right)e^{x} + (\alpha\, cos(2x) + \beta sin(2x))e^{x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f'(0) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ 2\beta + \alpha = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ 2\beta + 5 = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

D'où $f(x) = (5\, cos(2x) + 2sin(2x))e^{x}$