Niveau : Deuxième bac sciences PC/SVT/STE

CAM
CENTRE EL MOUMEN

Résumé

Rappels de cours sur les limites et dérivation

Plan de chapitre 0 : Révision .

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série d'exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection CAM – Compte Personnel

Prof El Moumen 06 66 73 83 49 Prof El Moumen

Collection CAM – Compte Professionnel

Centre El Moumen 06 66 73 83 49 https://www.elmoumen.academy

I) Signe de $f(x) = ax + b \quad ; a \neq 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$a > 0$; $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe ax+b	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe $ax+b$	$+$	0	$-$

II) Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c \ ; a \neq 0 ; \ \Delta = b^2 - 4ac$

Première cas $\Delta \geq 0$: On pose $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	singe contraire de a	0	Signe de a

Deuxième cas $\Delta = 0$, On pose $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Troisème cas $\Delta < 0$,

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a

III) Limites d'une fonction

Propriétés : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) =$	LL'	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour voir si le produit. $+\infty$ ou $-\infty$

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour voir si le produit $+\infty$ ou $-\infty$

Les formes indéterminées sont, " $+\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$

Propriétés à retenir :

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\textit{terme de plus haut degré})$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\textit{terme de plus haut degré de } P)}{(\textit{terme de plus haut degré de } Q)}$
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *et* $l \geq 0$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- **Si** $g(x) \leq f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
- **Si** $f(x) \leq g(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- **Si** $g \leq f \leq h$ **et** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Prof : El Moumen **Rappel 2 : Dérivabilité d'une fonction**

1) Dérivabilité d'une fonction en a

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \quad (l\in\mathbb{R})$

Alors la fonction f est dérivable en a et on a : $f'(a)=l$,

Interprétation géométrique:

Si la fonction f est dérivable en a alors la courbe (Cf) admet une droite tangente (T) au point $A(a\,;f(a))$ d'équation :

$$(T):\ y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

2) Dérivabilité à gauche et à droite de a et Interprétation géométrique:

Si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$,alors f est dérivable à droite de a et $l=f_d{}'(a)$

Inter géo : (Cf) admet une demi-tangente au point $A(a\,;f(a))$ d'équation : $y=f_d{}'(a)(x-a)+f(a)$ *tel que* $x>a$

Si $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$ l alors f est dérivable à gauche de a et $l=f_g{}'(a)$

Inter géo : (Cf) admet une demi-tangente au point $A(a\,;f(a))$ d'équation : $y=f_g{}'(a)(x-a)+f(a)$ *tel que* $x<a$

Propriété : Si $f_d{}'(a)=f_g{}'(a)$ alors la fonction f est dérivable en a

3) Tangente parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ alors f est non dérivable en a et on :

- Si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ alors la courbe(Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut
- Si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas
- Si $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

Dérivées des fonctions usuelles **2 Bac sc PC/SVT/STE**

u *et* v des fonctions dérivables sur l'intervalle I et k un cts ;n entier

la focntion f	$D_{f'}$;Condition	Dérivée f'
1) $f(x)=k$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
2) $f(x)=kx$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=k$
3) $f(x)=x^n$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
4) $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f=\mathbb{R}^*$	$]-\infty,0[$ ou $]0;+\infty[$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
5) $f(x)=\sqrt{x}$; $D_f=\mathbb{R}^+$	$D_{f'}=]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $f=u+v$	$D_{f'}=I$	$f'=u'+v'$
7) $f=k\,u$	$D_f{}'=I$	$f'=ku'$
8) $f=u.v$	$D_{f'}=I$	$f'=u'.v+u.v'$
9) $f(x)=\frac{u}{v}$	$v\neq 0$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
10) $f(x)=\frac{1}{v}$	$v\neq 0$	$f'(x)=\frac{-.v'}{v^2}$
11) $f(x)=\sqrt{u}$	$u>0$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12) $f(x)=u^n$	$D_f{}'=I$	$f'=n\,u'u^{n-1}$
13) $f(x)=\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$
14) $f(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$
15) $f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi$	$f'(x)=1+\tan^2 x$
16) $f(x)=\sin(ax+b)$	$D_f{}'=\mathbb{R}$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
17) $f(x)=\cos(ax+b)$	$D_f{}'=\mathbb{R}$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$

Propriété : f une fonction dérivable sur un intervalle I

- $(\forall x\in I);\ f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est croisante sur I
- $(\forall x\in I);\ f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est décroisante sur I
- $(\forall x\in I);\ f'(x)=0 \Leftrightarrow$ la fonction f est constante sur I